ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Matlab-Octave

Η Συνάρτηση rref δίνει την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

```
>> A=[1 2 3;4 5 6;7 8 0]
A =
   1   2   3
   4   5   6
   7   8   0
>> b=[1;2;3]
b =
   1
   2
   3

>> rref([A b])
ans =
   1.00000   0.00000   0.00000  -0.33333
   0.00000   1.00000   0.00000   0.66667
   0.00000   0.00000   1.00000  -0.00000
```

Η λύση στην τελευταία
Στήλη του αποτελέσματος
.

Παράδειγμα (2)

```
>> A=[1 1;2 2]
A =
   1   1
   2   2
>> b=[2;3]
b =
   2
   3
>> rref([A b])
ans =
   1   1   0
   0   0   1
```

Το σύστημα είναι ασυμβίβαστο
και δεν υπάρχει λύση

Ενσωματωμένη συνάρτηση επίλυση συστήματος

```
>> A=[1 2 3;4 5 6;7 8 0]
A =
1 2 3
4 5 6
7 8 0
>> b=[1;2;3]
b =
1
2
3
>> x=A\b
x =
-0.3333
0.6667
0
```

Νόρμες διανύσματος

Η p-νόρμα $(1 \le p < \infty)$ διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως εξής:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Στην πράξη χρησιμοποιούνται συνήθως οι 1-, η 2- και η ∞-νόρμα για τις οποίες ισχύουν:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Παράδειγμα

```
>> x=[1 2 3 4]
x =
   1   2   3   4
>> norm(x,1)
ans =  10
>> norm(x,2)
ans =  5.4772
>> norm(x,inf)
ans =  4
```

Νόρμες Πινάκων

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| , \qquad \|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma \left(A^T A \right)} , \qquad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Παράδειγμα

```
>> A= [ 2 -1 4;-2 3 -1;6 -1 4]
A =
   2  -1   4
  -2   3  -1
   6  -1   4
>> norm(A,1)
ans =  10
>> norm(A,2)
ans =  8.8141
>> norm(A,inf)
ans =  11
```

Δείκτης Κατάστασης

Ο **δείκτης κατάστασης** (condition number) ενός αντιστρέψιμου πίνακα A ορίζεται ως εξής:

$$\kappa_p(A) = \|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\kappa_p(A) \geq 1$$

αν η χρησιμοποιούμενη νόρμα πίνακα είναι **φυσική**. Αν $\kappa_p(A) >> 1$ λέμε ότι ο A είναι **κακής κατάστασης** (ill or badly conditioned). Διαφορετικά λέμε ότι ο A είναι **καλής κατάστασης** (well conditioned).

Παράδειγμα

Η λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{bmatrix} .780 & .563 \\ .913 & .659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .217 \\ .254 \end{bmatrix}$$

είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$. Πράγματι με τη MATLAB παίρνουμε:

```
>> A=[.780 .563; .913 .659]

A =
    0.7800    0.5630
    0.9130    0.6590

>> b=[.217; .254]

b =
    0.2170
    0.2540

>> x=A\b

 x =
     1.0000
    -1.0000
```

Παράδειγμα

Αν διαταράξουμε πολύ λίγο τον πίνακα των συντελεστών, και λύσουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} .780 & .563001 \\ .913 & .659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .217 \\ .254 \end{bmatrix}$$

```
>> format long

>> A(1,2)=.563001
A =
   0.78000000000000   0.56300100000000
   0.91300000000000   0.65900000000000

>> x=A\b

x =
   8.57471264411556
 -11.49425287416920

>> cond(A,1)

ans =
  2.6614e+006
```